**Майже вірогідна подія**

**Означення.** Масова випадкова подія  не еквівалентна вірогідній () і така що її ймовірність дорівнює одиниці (), називається **майже вірогідною**. Подія протилежна до майже вірогідної називається **майже неможливою**. Очевидно, що майже неможлива подія не еквівалентна вірогідній. (*B≠v → P(B)=0*).

**Приклад.** На кулю нанесена сітка географічних координат. Кулю кидаємо навмання на горизонтальну площину. Дотик точкою поза екватором майже вірогідна подія, дотик полюс – майже неможлива подія. Це очевидно на підставі геометричної ймовірності.

**Посилений закон великих чисел**

В 1713 році була опублікована теорема Я. Бернуллі – закон великих чисел.

**Теорема.** Нехай  – кількість появ події  з імовірністю  в серії з  незалежних спроб, а  тоді:.

У 1909 р. французький математик Еміль Борель (1871-1956) провів узагальнення теореми Я. Бернуллі.

**Теорема.** Нехай  – кількість появ події  з імовірністю  в серії з  незалежних спроб. Тоді майже відносна частота збігається до ймовірності появи події в одній спробі, тобто.

Теорема Е.Бореля посилює теорему Я.Бернуллі і називається **посиленим законом великих чисел.**

Практичний висновок з теореми Е.Бореля такий самий як з теореми Я.Бернуллі: при великих *n apriori* невідома ймовірність появи події в одній спробі наближено дорівнює відносній частоті: p ≈ , де  – кількість сприятливих спроб.

**Посилений закон великих чисел для функції розподілу**

Статистичну змінну пізнаємо за допомогою спостережень над нею, пізнаємо в результаті спроб. Нехай спроби будуть взаємно незалежні та проведені в незмінних умовах, а результати спостережень над одномірною статистичною змінною нехай будуть такі:

(1) 

Утворимо варіаційний ряд  для статистичного матеріалу (1) і розглянемо функцію , яка в точці *x* (<-∞<*x*<∞) дорівнює відносній частоті тих елементів варіаційного ряду, що не більші від *x*. Тобто

(2) 

Функція називається **емпіричною функцією розподілу**. При кожному *x* ордината емпіричної функції розподілу є випадковою змінною з *n+1* можливими значеннями: *0, 1/n, 2/n, …,(n-1)/n, 1.* Припустимо, що спостереження (1) проведено над випадковою змінною ξ з функцією розподілу . Функція тоді називається **теоретичною функцією розподілу**. У 1933 р. В.Г. Глівенко (1897-1940) довів, що майже вірогідна емпірична функція розподілу збігається до теоретичної функції розподілу .

**Практичний висновок.** Якщо теоретична функція розподілу відома, то емпірична функція розподілу вказує на погодженість теорії з експериментом. Якщо ж теоретична функція розподілу не відома, то емпірична функція розподілу дає уявлення про її можливий вигляд.

Обидва підходи використовуються практично. У першому випадку змінна ξ називається **випадковою змінною**, а в другому – **статистичною змінною**.

Таким чином, терміни випадкова і статистична змінні вказують на два аспекти тієї ж самої мінливої величини. Теорема Глівенка вказує на те, що емпірична функція розподілу несе інформацію про теоретичну функцію розподілу, або що те саме, що статистичний матеріал несе інформацію про теоретичну функцію розподілу. Щоб це зручніше висловити впровадимо такі два поняття: **генеральна сукупність і вибірка**.

**Означення**. Сукупність всеможливих значень випадкової змінної називають **генеральною сукупністю або популяцією**.

**Означення**. Ряд незалежних спостережень над випадковою змінною називають **вибіркою з генеральної сукупності**.

Таким чином теорема Глівенка доводить, що вибірка несе інформацію про генеральну сукупність.

**Основна задача математичної статистики** полягає в тому, щоб виявити інформацію, яку несе вибірка про генеральну сукупність.

**Означення**. Всяке твердження про генеральну сукупність на основі вибірки називаємо **гіпотезою**.

**Означення**. Міркування, на основі яких приходимо до висновків про гіпотезу називаємо **статистичним доведенням**.

Кожне статистичне доведення в основному проводиться за такою схемою.

**Схема статистичного доведення**

В кожному статистичному доведенні є наступні кроки:

* Формулюємо гіпотеза .
* Вибираємо рівень значущості .
* Вибираємо відповідно гіпотезі статистика .
* Знаходимо розподіл цієї статистики.
* На основі знайденого розподілу визначаємо критичну область для статистики.
* Знаходимо емпіричне значення статистики.
* Приймаємо вирішення про гіпотезу.

Якщо емпіричне значення статистики попадає в критичну область для гіпотези, то гіпотезу відкидаємо. Якщо ж емпіричне значення статистики не попадає в критичну для гіпотези, то гіпотезу приймаємо і кажемо що вона не суперечить експериментальним даним.

Статистичні гіпотези відносно генеральної сукупності можуть бути дуже різноманітними. Наприклад: про розподіл, про параметр розподілу, про рівність математичних сподівань або дисперсій тощо.

Статистичне доведення істотно відрізняються від математичного доведення. Математичне доведення базоване на логіці, тоді як статистичне доведення може мати такі чотири ситуації:

* Гіпотеза істинна і в результаті статистичного доведення ми її приймаємо.
* Гіпотеза хибна і в результаті статистичного доведення ми її відкидаємо.
* Гіпотеза істинна, але в результаті статистичного доведення ми її відкидаємо.
* Гіпотеза хибна, але в результаті статистичного доведення ми її приймаємо.

Таким чином при статистичному доведенні можливо допустити одну з двох похибок: або відкинути істинну гіпотезу (похибка 1-го типу), або прийняти хибну гіпотезу (похибка 2-го типу). Умовно допустити похибку 1-го, тобто ймовірність відкинути істинну похибку називаємо **рівнем значущості даного критерія** і позначаємо через . В наукових дослідженнях α переважно вибирається 0.05, а рідше 0.1 або 0.01. Перше статистичне доведення в сучасному розумінні провів англійський математик К. Пірсон у 1900 р. – році заснування математичної статистики.

При кожному статистичному доведенні центральною точкою є розподіл статистики на основі якої приймаємо рішення про гіпотезу. Тому цей розподіл за означенням є **критерієм**.

**Критерій Хі-квадрат (****)**

Нехай  – вибірка з генеральної сукупності . Потрібно перевірити гіпотезу , про те, що функція розподілу генеральної сукупності є . 

Поділимо генеральну сукупність довільним чином на  частин, які позначимо . Нехай в область  попадає  елементів вибірки. Очевидно, що.

На основі гіпотетичної функції розподілу  знаходимо, що імовірність того, що спостережувана змінна буде в комірці  .

Очевидно, що сума таких ймовірностей буде рівна 1.

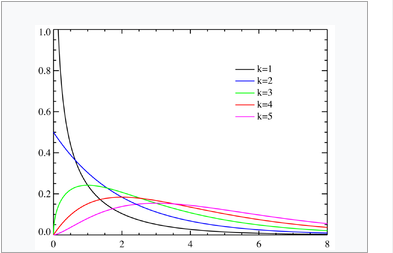
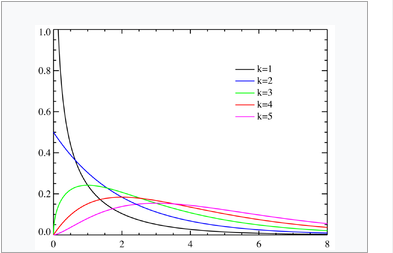
За міру відхилення теоретичного розподілу від вибірки К. Пірсон прийняв величину:



і довів, що для  статистика  має розподіл, який задається густиною:

.

Розподіл з густиною  називають розподілом з  ступенями свободи. Нижче на двох рисунках зображені густини та відповідно хі-квадрат розподіли при  від 1 до 5.



На основі густини  визначаємо критичну область для гіпотези при заданому рівні значущості . Для різних  і різних ступенів свободи (.f), критерій  табульований. Якщо, то гіпотезу *H* відкидають.

Умови застосовності критерію хі-квадрат:

* Першою необхідною умовою застосовності критерію хі-квадрат є те, щоб вибірка була велика ().
* Друга необхідна умова, щоб у кожному класі поділу генеральної сукупності було не менше ніж 10 спостережень (mi ≥10). Якщо в якомусь класі менше ніж 10 спостережень, то його об’єднують із сусіднім класом в один. Інколи треба об’єднати кілька класів в один.
* Третя необхідна умова застосовності критерію хі-квадрат: якщо на основі вибірки оцінюється  невідомих параметрів, то число ступенів вільності зменшують на . Якщо число класів після об’єднання є , а число параметрів , то число ступенів вільності дорівнює =*d.f.≥1*.